

**АВТОНОМНАЯ НЕКОММЕРЧЕСКАЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ «НАУЧНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «СИРИУС»
(АНОО ВО «УНИВЕРСИТЕТ «СИРИУС»)**

«Утверждаю»

заместитель директора по образовательной деятельности

АНОО ВО «Университет «Сириус»



О.Д. Федоров

2025 г.

ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЙ

для поступающих на обучение по образовательной программе
высшего образования – программе подготовки научных и научно-педагогических
кадров в аспирантуре по научной специальности

1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

СОГЛАСОВАНО:

Исполнительный директор
научного центра информационных технологий
и искусственного интеллекта

М.В. Ширяев

Руководитель приёмной комиссии

Б.Е. Кадлубович

Федеральная территория «Сириус»

2025

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Программа вступительных испытаний предназначена для лиц, поступающих на обучение по образовательной программе высшего образования – программе подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре по научной специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (далее – образовательная программа).

В программу вступительных испытаний включено описание форм и процедур вступительных испытаний, представлено содержание тем и критерии оценки.

Вступительные испытания проводятся в форме письменного экзамена и собеседования. Письменное вступительное испытание оценивается по 40-балльной шкале. Собеседование оценивается по 40-балльной шкале. Язык проведения письменного экзамена – русский, собеседования – русский и английский.

Проведение вступительных испытаний осуществляется с применением дистанционных технологий.

Продолжительность письменного экзамена: 120 минут.

Продолжительность собеседования: до 20 минут.

1. Цель и задачи вступительных испытаний

Цель проведения вступительных испытаний – отбор наиболее подготовленных поступающих на обучение по образовательной программе, в том числе, определение уровня их готовности к самостоятельной научной и проектной деятельности.

Основные задачи вступительных испытаний:

- выявление и оценка уровня сформированности общекультурных,
- общепрофессиональных и профессиональных компетенций поступающего;
- определение уровня готовности к работе и проектной деятельности в компаниях и на производствах и, а также научно-исследовательской деятельности в рамках НИОКР;
- выяснение познавательной и мотивационной сферы поступающего;
- выявление научных и профессиональных интересов;
- определение уровня научно-технической эрудиции и языковой подготовки поступающего.

Целью вступительных испытаний является проверка следующих знаний и умений:

- знание основ математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии, теории функций комплексного переменного, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, математической логики, алгебры, теории чисел, дискретной математики, языка программирования Python;
- умение применять математические навыки, логическое мышление, аргументировать свои высказывания, поддержать беседу на научную тему, в том числе на английском языке;
- умение определять цели и задачи научного исследования, выделять актуальность научной проблематики, интерпретировать и анализировать результаты;
- владение навыками чтения научной литературы (на русском и английском языках) и базовыми инструментами поиска научной информации, в том числе в сети «Интернет».

2. Содержание вступительных испытаний

2.1. Общие вопросы.

1. Функции алгебры логики. Реализация их формулами. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма.
2. Язык логики высказываний. Булевы функции. Исчисление высказываний, его непротиворечивость и полнота.
3. Непрерывность функций одной переменной, свойства непрерывных функций.
4. Функции многих переменных, полный дифференциал и его геометрический смысл. Достаточные условия дифференцируемости. Градиент.
5. Определенный интеграл. Интегрируемость непрерывной функции. Первообразная непрерывной функции.
6. Неявные функции. Существование, непрерывность и дифференцируемость неявных функций.
7. Числовые ряды. Сходимость рядов. Критерий сходимости Коши. Достаточные признаки сходимости (Коши, Даламбера, интегральный, Лейбница).
8. Абсолютная и условная сходимость ряда. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Перестановка членов ряда. Теорема Римана. Умножение рядов.
9. Ряды и последовательности функций. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов (непрерывность суммы, почленное интегрирование и дифференцирование).
10. Степенные ряды в действительной и комплексной области. Радиус сходимости. Теорема Коши-Адамара. Теорема Абеля. Свойства степенных рядов (почленное интегрирование, дифференцирование). Разложение элементарных функций.
11. Несобственные интегралы и их сходимость. Равномерная сходимость интегралов, зависящих от параметра. Свойства равномерно сходящихся интегралов.
12. Ряды Фурье. Достаточные условия представимости функции рядом Фурье.
13. Линейные пространства, их подпространства. Базис. Размерность. Теорема о ранге матрицы.

14. Система линейных уравнений. Геометрическая интерпретация системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений системы однородных линейных уравнений. Теорема Кронекера – Капелли.

15. Билинейные и квадратичные функции и формы в линейных пространствах и их матрицы. Приведение к нормальному виду. Закон инерции.

16. Линейные преобразования линейного пространства, их задание матрицами. Характеристический многочлен линейного преобразования. Собственные векторы и собственные значения, связь последних с характеристическими корнями.

17. Евклидово пространство. Ортонормированные базисы. Ортогональные матрицы. Симметрические преобразования. Приведение квадратичной формы к главным осям.

18. Группы, подгруппы, теорема Лагранжа. Порядок элемента. Циклические группы, факторгруппа. Теорема о гомоморфизмах.

19. Аффинная и метрическая классификация кривых и поверхностей второго порядка. Проективная классификация кривых.

20. Дифференциальное уравнение первого порядка. Теорема о существовании и единственности решения.

21. Линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Линейное однородное уравнение. Линейная зависимость функций. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского. Линейное неоднородное уравнение.

22. Линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами: однородное и неоднородное.

23. Функции комплексного переменного. Условия Коши – Римана. Геометрический смысл аргумента и модуля производной.

24. Элементарные функции комплексного переменного и даваемые ими конформные отображения. Простейшие многозначные функции. Дробно-линейные преобразования.

25. Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру. Интеграл Коши. Ряд Тейлора.

26. Ряд Лорана. Полнос и существенно особая точка. Вычеты.

2.2. Специальные вопросы

1. Аксиоматическая теория множеств. Парадоксы наивной теории множеств. Аксиома выбора. Вполне упорядоченные множества и теорема Цермело. Лемма Цорна.

2. Функции алгебры логики. Полнота в алгебре логики, критерий полноты Поста.

3. Общее понятие алгоритма. Вариант формализации понятия алгоритма. Универсальный алгоритм. Вычислимые функции, перечислимые и разрешимые множества. Теорема Гёделя о неполноте. Неразрешимость формальной арифметики.

4. Время и память как меры сложности вычислений. Классы P, NP, PSPACE. Полиномиальная сводимость. NP-полные проблемы.

5. Графы, деревья. Основные свойства деревьев.

6. Планарность графов, теорема Эйлера. Критерий планарности Понтрягина – Куратовского.

7. Конечные автоматы, эксперименты с автоматами, теорема Мура.

8. Машины Тьюринга и рекурсивные функции, совпадение классов частично рекурсивных функций и функций, вычислимых на машинах Тьюринга.

9. Линейные операторы линейного пространства, их задания матрицами. Характеристический многочлен линейного оператора. Собственные векторы и собственные значения, связь последних с характеристическими корнями. Теорема Гамильтона – Кэли. Жорданова нормальная форма линейного оператора.

10. Евклидово пространство. Ортонормированные базисы. Ортогональные и самосопряженные линейные операторы, их матрицы. Приведение квадратичной формы к главным. Перестановки. Симметрическая группа перестановок. Теорема Кэли о конечных группах.

11. Группы, подгруппы, теорема Лагранжа. Факторгруппа. Теорема о гомоморфизмах для групп. Порядок элемента. Циклические группы. Коммутант группы, разрешимые группы. Классы сопряженности, центр группы. Действие групп на множестве, стабилизаторы, орбиты.

12. Кольца, поля. Кольцо многочленов. Деление с остатком многочленов над полем, алгоритм Евклида. Неприводимые многочлены над полем, критерий

неприводимости многочленов степени 2 и 3, разложение многочлена над полем в произведение неприводимых многочленов.

13. Алгоритм Евклида поиска наибольшего общего делителя целых чисел. Решение линейных уравнений в целых числах.

14. Мультипликативные функции. Функция Мёбиуса, формула обращения Мёбиуса. Формулы для количества и для суммы делителей. Функция Эйлера и её свойства.

15. Теорема Эйлера и малая теорема Ферма. Китайская теорема об остатках. Решение полиномиальных сравнений по простому модулю.

16. Символ Лежандра. Квадратичный закон взаимности. Символ Якоби и его вычисление.

17. Первообразные корни. Существование первообразных корней по простому модулю p , модулям p^k , $2p^k$, $k > 1$. Индексы и их свойства.

18. Представление чисел цепными дробями. Теорема Дирихле о приближении действительных чисел рациональными. Цепные дроби квадратичных иррациональностей.

19. Конечные поля и их расширения. Цикличность мультипликативной группы конечного поля. Автоморфизм Фробениуса, группа Галуа для конечных полей.

20. Характеры абелевых групп. Двойственная группа, свойства ортогональности. Аддитивные и мультипликативные характеры конечного поля. Суммы Гаусса.

21 Основы языка программирования Python.

22. Переменные, типы переменных. Структуры данных – списки, словари, множества. Циклы, ветвления, рекурсия. Функции. Классы. Оценка сложности алгоритма.

2.3. Стратегия развития Научно-технологического университета «Сириус».

– Указ Президента РФ от 21.07.2020 № 474 «О национальных целях развития РФ на период до 2030 года»;

– Указ Президента РФ от 01.12.2016 № 642 «О Стратегии научно-технологического развития РФ»;

- Указ Президента РФ от 02.07.2021 № 400 «О Стратегии национальной безопасности РФ»;
- Указ Президента РФ от 09.05.2017 № 203 «О Стратегии развития информационного общества в РФ на 2017 – 2030 годы»;
- Указ Президента РФ от 10.10.2019 № 490 «О развитии искусственного интеллекта в РФ» (вместе с «Национальной стратегией развития искусственного интеллекта на период до 2030 года»);
- Прогноз научно-технологического развития РФ на период до 2030 года, утвержденный Правительством РФ;
- Распоряжение Правительства РФ от 31.12.2020 № 3684-р «Об утверждении Программы фундаментальных научных исследований в РФ на долгосрочный период (2021 – 2030 годы)»;
- Постановление Правительства РФ от 15.04.2014 № 313 «Об утверждении государственной программы РФ «Информационное общество»»;
- Распоряжение Правительства РФ от 01.11.2013 № 2036-р «Об утверждении Стратегии развития отрасли информационных технологий в РФ на 2014 – 2020 годы и на перспективу до 2025 года»;
- Распоряжение Правительства РФ от 19.08.2020 № 2129-р «Об утверждении Концепции развития регулирования отношений в сфере технологий искусственного интеллекта и робототехники до 2024 года».

3. Демонстрационный вариант письменного экзамена

Вопросы с развернутым ответом (оцениваются максимально до 10 баллов каждый):

1. Пусть числа a_1, \dots, a_n попарно различны. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1, \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_1^{n-1}x_1 + a_2^{n-1}x_2 + \dots + a_n^{n-1}x_n = b^{n-1}. \end{cases}$$

2. Функция $f(x)$ дифференцируема на $[x_1; x_2]$ и $0 < x_1 < x_2$. Доказать, что найдется такая точка $\xi \in (x_1; x_2)$, что

$$\frac{x_1f(x_2) - x_2f(x_1)}{x_2 - x_1} = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

3. Найти площадь области, ограниченной петлей кривой

$$x^3 + y^3 = 7xy.$$

4. Найти в целых числах x все решения уравнения

$$x^3 + (x + 1)^3 + (x + 2)^3 = (x + 3)^3.$$

4. Примерные вопросы для собеседования

1. Почему вы выбрали эту образовательную программу?
2. Какая научная книга, статья или результат вас больше всего впечатлил?
3. Какой курс или предмет в вашей предыдущей учебе был для вас наиболее важным, и что вы из него узнали?
4. Какой у вас был средний балл и какие предметы, близкие к выбранной научной специальности, вы изучали?
5. Расскажите про тематику вашей ВКР по предыдущему образованию.
6. Есть ли у вас идеи для исследовательского проекта? Как бы вы их реализовали?

7. Что вы знаете о научных направлениях, развиваемых в нашем направлении? Какие из них вас интересуют?
8. Какой у вас опыт в программировании? Какие языки программирования и изучали и на каком уровне владеете?
9. Как вы относитесь к критическому анализу научной литературы и как вы его используете для своего обучения?
10. Как вы справляетесь с трудными задачами или неудачами в лабораторных исследованиях? Приведите пример.
11. Как вы работаете в команде? Есть ли у вас опыт работы в групповых проектах?
12. Каковы ваши навыки в написании научных статей и отчетов?
13. Какова ваша мечта о карьере? Какие шаги вы собираетесь предпринять, чтобы достичь этой мечты?
14. Что вы знаете требованиях к защите кандидатской диссертации?
15. Что такое СНТР РФ? Перечислите основные направления государственной политики в области научно-технологического развития РФ.
16. Какие возможности вы видите для своего профессионального роста в нашем университете?

5. Общие критерии оценивания собеседования

При оценке ответов поступающего экзаменационная комиссия руководствуется следующими критериями:

- способность структурировать и аргументировать свои высказывания;
- способность к анализу и интерпретации фактов и явлений;
- понимание сущности научно-исследовательской деятельности;
- понимание концепции Стратегии развития Университета «Сириус»;
- понимание роли и задач науки и технологий в достижении целей национального развития России, повышении безопасности и качества жизни граждан, в том числе в выбранной сфере профессиональной деятельности;
- уровень имеющихся к данному моменту общекультурных, общепрофессиональных и профессиональных компетенций;
- публикационная активность поступающего;

- умение определить область научных интересов и планы, связанные с осуществлением дальнейших научных исследований в Университете «Сириус»;
- способность поступающего сделать краткую презентацию своих научных интересов и (или) поддержать беседу на научную тему на английском языке.

6. Литература для подготовки к вступительным испытаниям

а. Основная литература

1. Кострикин А.И., Манин Ю. И. Линейная алгебра и геометрия. 4-е изд. С.-П.: Лань, 2012г.
2. Александров П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. Наука, 1979.
3. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. 18-е изд. С.-П.: Лань, 2011г.
4. Винберг Э. Б. Курс алгебры. М.: МЦНМО, 2013.
5. Кострикин А.И. Введение в алгебру, ч.1. Основы алгебры. М.: МЦНМО, 2009.
6. Кострикин А.И. Введение в алгебру, ч.2. Линейная алгебра. М.: МЦНМО, 2009.
7. Кострикин А. И. Введение в алгебру, ч.3: Основные структуры алгебры. М.: МЦНМО, 2009.
8. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа в 3 т. ЮРАЙТ, 2019.
9. Фихтенгольц Г.И. Основы математического анализа, тт. 1,2,3
10. Арнольд В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Литрес, 2022.
11. Петровский И.Г. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 2009.
12. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. – 1969.
13. Нестеренко Ю.В. Теория чисел. М.: Академия, 2008.
14. Бухштаб А. А. Теория чисел. – Рипол Классик, 2013.
15. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Высшая Школа, 2001.

16. Дехтярь М. И., Дудаков С. М., Карлов Б. Н. Лекции по дискретной математике. – 2021.
17. Чашкин А.В. Дискретная математика. М.: Академия, 2012.
18. Айерленд К., Роузен М., Классическое введение в современную теорию чисел, М.: МИР, 1987.

в. Дополнительная литература

1. Ленг С. Алгебра. М.: Мир, 1968.
2. Тыртышников Е.Е. Основы алгебры. М.: Физматлит, 2017.
3. Лидл Р., Нидеррайтер Г. Конечные поля. т. 1. М.: Мир, 1988.
4. Шафаревич И. Р. Основы алгебраической геометрии. – МЦНМО, 2007.
5. Виноградов И.М. Основы теории чисел. М., Наука, 1981.
6. Борович З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел, 3-е доп. изд. – 1985.
7. Алексеев В.Б. Дискретная математика. М.: Инфра-М, 2021.

с. Периодические издания

1. Успехи математических наук
2. Известия РАН. Серия математическая
3. Математический сборник

д. Цифровые образовательные ресурсы

1. Стратегия развития Университета «Сириус», https://siriusuniversity.ru/pr_img/1918100371/20230517/23730514/стратегия_развития_1.pdf?fid=199910723756&id=191811257302

2. Общероссийский портал Math-Net.Ru <https://www.mathnet.ru/> – Современная информационная система, предоставляющая российским и зарубежным ученым различные возможности в поиске научной информации по математике, физике, информационным технологиям и смежным наукам.

3. Электронный ресурс arXiv <https://arxiv.org/> – Крупнейшим бесплатный архив электронных научных публикаций по разделам физики, математики, информатики, механики, астрономии и биологии. Имеется подробный тематический каталог и возможность поиска статей по множеству критериев.